齊藤大樹

TMD の基礎理論

１．TMD の応答倍率

TMD の最適値を設定するには、設定した値による TMD の振動特性を知る必要がある。制振システムの最適値を設定する際には、建物の応答を低減するにあたり、どの値を見て建物の応答低減効果を評価するかによって必要な制振システムの要件が変わってくる。TMD の場合は、同調させた建物の振動に対して応答を低減するシステムであるため、建物の振動に対する応答の値を計算する必要がある。

ここでは、その値を計算するために必要な式の誘導を行う。TMD の諸元として質量や固有振動数などを決定する必要があるが、それらは建物の特性によって決まるため、質量比や固有振動数比といった建物の質量や固有振動数などで無次元化した値を用いて TMD の諸元を決定する。また、振動に対する応答として計算する値も、地動の振動数を建物の固有振動数で基準化し、建物の応答を地動の振幅で基準化した値を用いる。それにより、様々な特性の建物と地動に対し、同一の式を用いて評価することができる。

TMD の振動特性を計算するため、2 質点モデル（図 1）を考える。図 1 は、頂部に TMD を設置した建物を想定しており、1 質点建物モデル（主振動系）と TMD（従振動系）から構成される。主振動系は質量m_1、剛性k_1、減衰c_1、従振動系は質量m_2、剛性k_2、減衰c_2である。地動変位x_0に対する主振動系の相対変位をx_1、従振動系の相対変位をx_2としている。

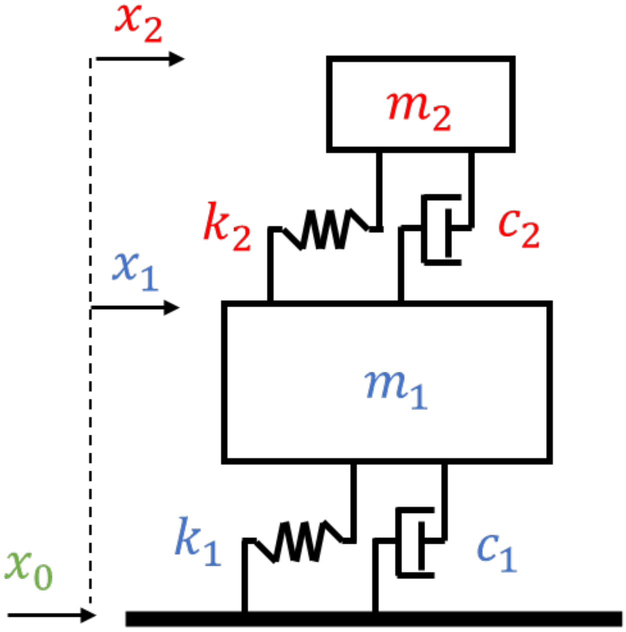

図 1　2 質点モデル（相対変位）

図 1 の運動方程式は、以下のとおりである。

$$\begin{cases} m_1(\ddot{x}_1+\ddot{x}_0)+c_1\dot{x}_1-c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k_1x_1-k_2(x_2-x_1)=0 \\ m_2(\ddot{x}_2+\ddot{x}_0)+c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k_2(x_2-x_1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

ここで、2 質点モデルの基礎に地動$x_0(t)$が加わる場合の運動方程式を考える。式(1)より、地動慣性力（$-m\ddot{x}_0$）を見かけの外力として扱うと、以下の運動方程式が得られる。

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=-m_1\ddot{x}_0 \\ m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+c_2\dot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=-m_2\ddot{x}_0 \end{cases} \tag{2}$$

行列形式で記述すると、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{x}_0 \tag{3}$$

連立方程式の 1 式と 2 式をそれぞれm_1、m_2で割ると、以下の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2\omega_1h_1+2\mu\omega_2h_2 & -2\mu\omega_2h_2 \\ -2\omega_2h_2 & 2\omega_2h_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \omega_1^2+\omega_2^2\mu & -\omega_2^2\mu \\ -\omega_2^2 & \omega_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{x}_0 \tag{4}$$

ここで、ω_1は主振動系の固有円振動数、ω_2は従振動系の固有円振動数、μは主振動系と従振動系の質量比、h_1は主振動系の減衰定数、h_2は従振動系の減衰定数を表している。

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\ (a)\quad \omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\ (b)\quad \mu=\frac{m_2}{m_1}\ (c)\quad h_1=\frac{c_1}{2m_1\omega_1}\ (d)\quad h_2=\frac{c_2}{2m_2\omega_2}\ (e) \tag{5}$$

ここで、地動$x_0(t)$を以下の式で定義し、複素系の調和地動に対する運動方程式の定常応答解を導出する。

$$x_0=A_0e^{i\omega t} \tag{6}$$

このとき、地動の加速度は

$$\ddot{x}_0=-\omega^2A_0e^{i\omega t} \tag{7}$$

運動方程式中の変位(8)、速度(9)、加速度(10)は以下のように与えられる。

$$x_j=A_je^{i\omega t}\qquad (j=0,1,2) \tag{8}$$

$$\dot{x}_j=i\omega A_je^{i\omega t}\qquad (j=0,1,2) \tag{9}$$

$$\ddot{x}_j=-\omega^2A_je^{i\omega t}\qquad (j=0,1,2) \tag{10}$$

式(4)に式(8)～(10)を代入すると、以下の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -\omega^2+\omega_1^2+\omega_2^2\mu+(2\omega_1h_1+2\mu\omega_2h_2)i\omega & -\omega_2^2\mu-2\mu\omega_2h_2i\omega \\ -\omega_2^2-2\omega_2h_2i\omega & -\omega^2+\omega_2^2+2\omega_2h_2i\omega \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}e^{i\omega t}=\begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}A_0e^{i\omega t} \tag{11}$$

式(11)をω_1^2 で割り、式変形を行うと、以下の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -\beta^2+1+\alpha^2\mu+(2h_1+2\mu\alpha h_2)i\beta & -\alpha^2\mu-2\mu\alpha h_2 i\beta \\ -\alpha^2-2\alpha h_2 i\beta & -\beta^2+\alpha^2+2\alpha h_2 i\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta^2 A_0 \\ \beta^2 A_0 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

ここで、各係数は以下のように定義される。αは主振動系と従振動系の固有円振動数比、βは主振動系と調和地動の固有円振動数比を表している。

$$\alpha=\frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \beta=\frac{\omega}{\omega_1} \tag{13}$$

複素振幅A_1とA_2はそれぞれ以下のように求められる。

$$A_1=\frac{\{\alpha^2(1+\mu)-\beta^2\}+2h_2\alpha\beta(1+\mu)i}{\det \boldsymbol{A}}\times\beta^2 A_0 \tag{14}$$

$$A_2=\frac{\{1+\alpha^2(1+\mu)-\beta^2\}+2\beta\{h_1+h_2\alpha(1+\mu)\}i}{\det \boldsymbol{A}}\times\beta^2 A_0 \tag{15}$$

よって、式(8)と式(14)、(15)より、主振動系の相対変位x_1と従振動系の相対変位x_2はそれぞれ以下のように定まる。

$$x_1=A_1e^{i\omega t}=\frac{\beta^2\{\alpha^2(1+\mu)-\beta^2\}+2h_2\alpha\beta^3(1+\mu)i}{\det \boldsymbol{A}}\times A_0e^{i\omega t}=\frac{R_1+I_1 i}{R_0+I_0 i}\times x_0 \tag{16}$$

$$x_2=A_2e^{i\omega t}=\frac{\beta^2\{1+\alpha^2(1+\mu)-\beta^2\}+2\beta^3\{h_1+h_2\alpha(1+\mu)\}i}{\det \boldsymbol{A}}\times A_0e^{i\omega t}=\frac{R_2+I_2 i}{R_0+I_0 i}\times x_0 \tag{17}$$

ここで、各係数は以下のように定義される。

$R_0=\{(1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)-\alpha\beta^2(\mu\alpha+4h_1h_2)\}$ (a) $I_0=2\beta\{h_1(\alpha^2-\beta^2)+h_2\alpha(1-\beta^2[1+\mu])\}$ (b) (18)

$R_1=\beta^2\{\alpha^2(1+\mu)-\beta^2\}$ (a) $I_1=2h_2\alpha\beta^3(1+\mu)$ (b) (19)

$R_2=\beta^2\{1+\alpha^2(1+\mu)-\beta^2\}$ (a) $I_2=2\beta^3\{h_1+h_2\alpha(1+\mu)\}$ (b) (20)

x_1とx_2をそれぞれx_0で基準化し、複素数の絶対値を計算する。以下の式(21)と(22)は、調和地動$x_0(t)$に対する主振動系と従振動系の応答相対変位の振幅の比であり、相対変位応答倍率という。

$$\left|\frac{x_1}{x_0}\right|=\frac{\sqrt{R_1^2+I_1^2}}{\sqrt{R_0^2+I_0^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{\beta^4\{\alpha^2(1+\mu)-\beta^2\}^2+4h_2^2\alpha^2\beta^6(1+\mu)^2}}{\sqrt{\{(1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)-\alpha\beta^2(\mu\alpha+4h_1h_2)\}^2+4\beta^2\{h_1(\alpha^2-\beta^2)+h_2\alpha(1-\beta^2[1+\mu])\}^2}} \tag{21}$$

$$\left|\frac{x_2}{x_0}\right|=\frac{\sqrt{R_2^2+I_2^2}}{\sqrt{R_0^2+I_0^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{\beta^4\{1+\alpha^2(1+\mu)-\beta^2\}^2+4\beta^6\{h_1+h_2\alpha(1+\mu)\}^2}}{\sqrt{\{(1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)-\alpha\beta^2(\mu\alpha+4h_1h_2)\}^2+4\beta^2\{h_1(\alpha^2-\beta^2)+h_2\alpha(1-\beta^2[1+\mu])\}^2}} \tag{22}$$

次に、図 2 のように、振動系の変位を絶対変位で定義した場合を考える。相対変位の変位応答倍率は建物や TMD の応答変位を評価する際に用いるが、応答加速度の評価や TMD の最適値計算には絶対変位・加速度の応答倍率を用いる。

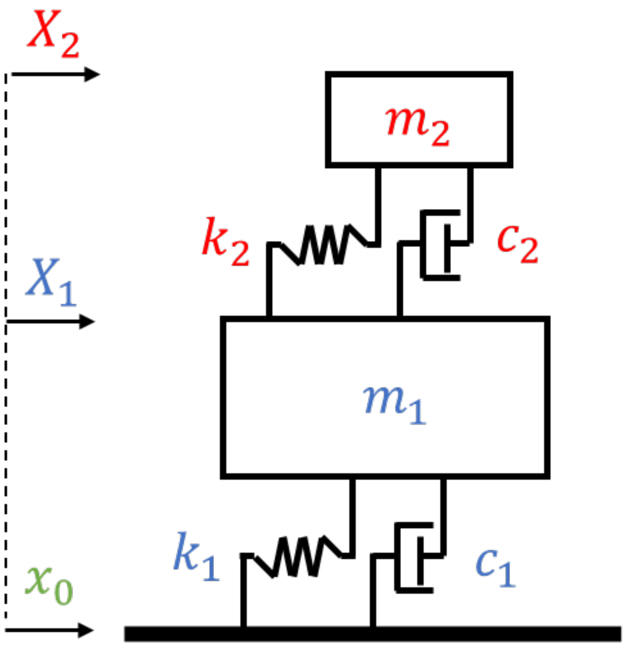

図 2　2 質点モデル（絶対変位）

相対変位の場合の式(2)と同様に、2 質点モデルの基礎に地動$x_0(t)$が加わるときの運動方程式を、絶対変位X_1, X_2を用いてたてる。

$$\begin{cases} m_1(\ddot{X}_1-\ddot{x}_0)+(c_1+c_2)(\dot{X}_1-\dot{x}_0)-c_2(\dot{X}_2-\dot{x}_0)+(k_1+k_2)(X_1-x_0)-k_2(X_2-x_0)=-m_1\ddot{x}_0 \\ m_2(\ddot{X}_2-\ddot{x}_0)-c_2(\dot{X}_1-\dot{x}_0)+c_2(\dot{X}_2-\dot{x}_0)-k_2(X_1-x_0)+k_2(X_2-x_0)=-m_2\ddot{x}_0 \end{cases} \tag{23}$$

ここで、式変形をして各係数をまとめると、方程式は以下の通りになる。

$$\begin{cases} m_1\ddot{X}_1+(c_1+c_2)\dot{X}_1-c_2\dot{X}_2+(k_1+k_2)X_1-k_2X_2=c_1\dot{x}_0+k_1x_0 \\ m_2\ddot{X}_2-c_2\dot{X}_1+c_2\dot{X}_2-k_2X_1+k_2X_2=0 \end{cases} \tag{24}$$

以降は式(4)～(22)と同様の操作を行うことで、以下の絶対変位応答倍率の式が求められる。以下の式より、絶対変位応答倍率は相対変位応答倍率の複素振幅に地動変位の複素振幅を足し合わせた値と等しいことがわかる。

$$\begin{aligned} \left|\frac{X_1}{x_0}\right| &= \frac{\sqrt{\{\alpha^2-\beta^2-4\alpha\beta^2h_1h_2\}^2+4\beta^2\{h_1(\alpha^2-\beta^2)+\alpha h_2\}^2}}{\sqrt{\{(1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)-\alpha\beta^2(\mu\alpha+4h_1h_2)\}^2+4\beta^2\{h_1(\alpha^2-\beta^2)+h_2\alpha(1-\beta^2[1+\mu])\}^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(R_1+R_0)^2+(I_1+I_0)^2}}{\sqrt{R_0^2+I_0^2}} \end{aligned} \tag{25}$$

$$\left|\frac{X_2}{x_0}\right| = \frac{\sqrt{\{\alpha^2 - 4\alpha\beta^2 h_1 h_2\}^2 + \{2\alpha\beta(\alpha h_1 + h_2)\}^2}}{\sqrt{\{(1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2) - \alpha\beta^2(\mu\alpha + 4h_1h_2)\}^2 + 4\beta^2\{h_1(\alpha^2-\beta^2) + h_2\alpha(1-\beta^2[1+\mu])\}^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{(R_2+R_0)^2 + (I_2+I_0)^2}}{\sqrt{R_0^2 + I_0^2}} \tag{26}$$

式(10)と(25)、(26)より、加速度応答倍率を求めると、以下の通りになる。以下の式より、地動に対する応答振幅の比は、変位・加速度ともに等価であることがわかる。

$$\ddot{X}_j(j=1,2) = -\omega^2 A_j e^{i\omega t} = -\omega^2 \times \frac{(R_j+R_0) + (I_j+I_0)i}{R_0 + I_0 i} \times A_0 \times e^{i\omega t} = \frac{(R_j+R_0) + (I_j+I_0)i}{R_0 + I_0 i} \times \ddot{x}_0 \tag{27}$$

$$\therefore \left|\frac{\ddot{X}_j}{\ddot{x}_0}\right|(k=1,2) = \frac{\sqrt{\left(R_j+R_0\right)^2 + \left(I_j+I_0\right)^2}}{\sqrt{R_0^2+I_0^2}} = \left|\frac{X_j}{x_0}\right| \tag{28}$$

式(25)、(26)により求められる主振動系の絶対応答倍率を図3に示す。図の横軸は図2の2質点モデルに入力する調和地動の円振動数（ω）を主振動系の固有円振動数（ω_1）で基準化した振動数比、縦軸は2質点モデルの応答を地動の振幅で基準化した値である。式(28)に示したとおり、振動系の応答振幅を地動の振幅で無次元化した値は、変位応答倍率・加速度応答倍率ともに等価であるため、ここではそれらを区別せずに応答倍率として扱う。

図3より、主振動系の応答倍率は、振動数比1付近で共振曲線が谷となっており、その両側に2つの山ができている。ここでは振動数比$\alpha = 0.9$、質量比$\mu = 0.1$、主振動系の減衰定数$h_1 = 0.05$, 従振動系の減衰定数$h_2 = 0.1$としている。

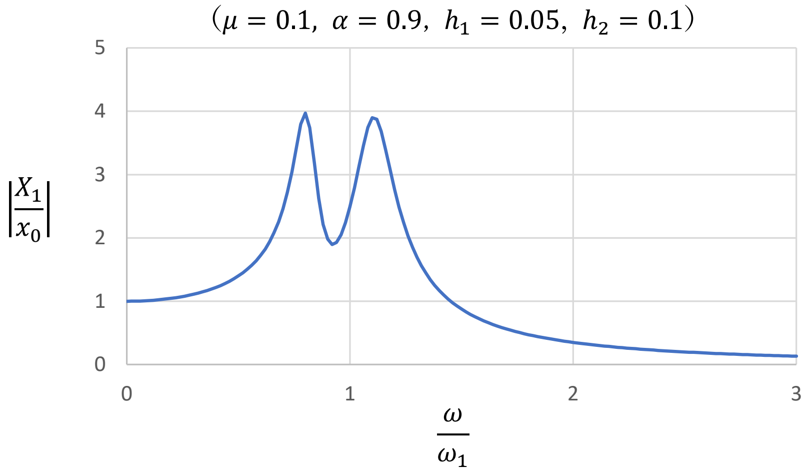

図3　主振動系絶対応答倍率

ここでは、主振動系の減衰を考慮せずに、$h_1 = 0$とした場合の共振曲線から、TMD の質量、剛性、減衰の最適値の検討を行う。図 4(a)は、TMD を設置していない非制振の建物を想定した主振動系のみのモデル、図 4(b)は減衰のない TMD を頂部に設置した建物を想定したモデル、図 4(c)は減衰のある TMD を頂部に設置した建物を想定したモデルである。図 5 に、それぞれの共振曲線を示す。ここでは振動数比$\alpha = 1$、質量比$\mu = 0.05$、従振動系の減衰定数$h_2 = 0.05$としている。

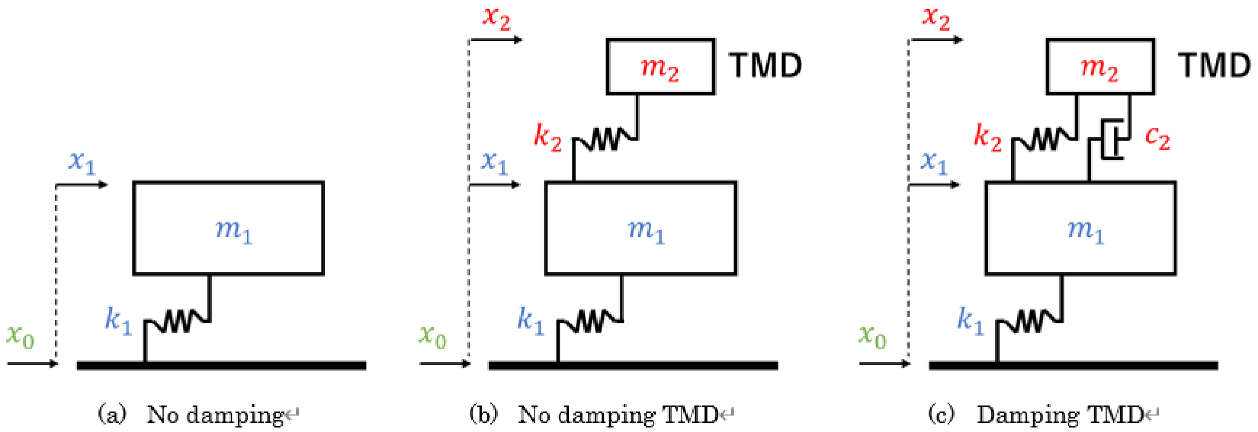

図 4　モデル比較

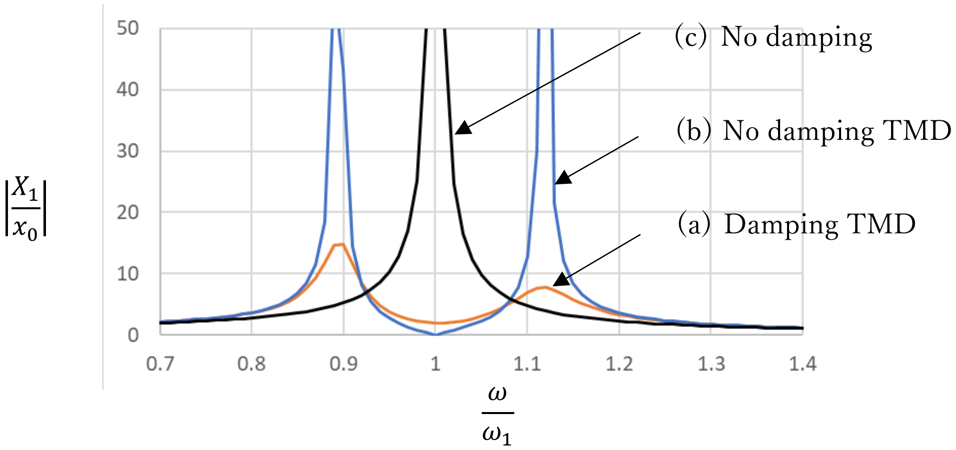

図 5　主振動系絶対応答倍率

図 6 に、質量比による応答倍率の変化を示す。質量比を大きくしていくほど、応答低減率が大きくなっていることがわかる。また、極大値の振幅が小さくなっているだけでなく、極大値の振動数の間隔が、質量比を大きくするほど広がっていることも確認できる。これにより、共振振動数から外力振動数が少しずれた範囲で入力された時に応答が増大してしまうことを防ぐことができる効果がある。大重量の錘を設置することによって応答低減効果を高められるだけでなく、ロバスト性を高めることができるが、実際に設計する際は、建物に設置することを踏まえて、施工上の制約や安全性を考慮して錘の質量を決定する必要がある。

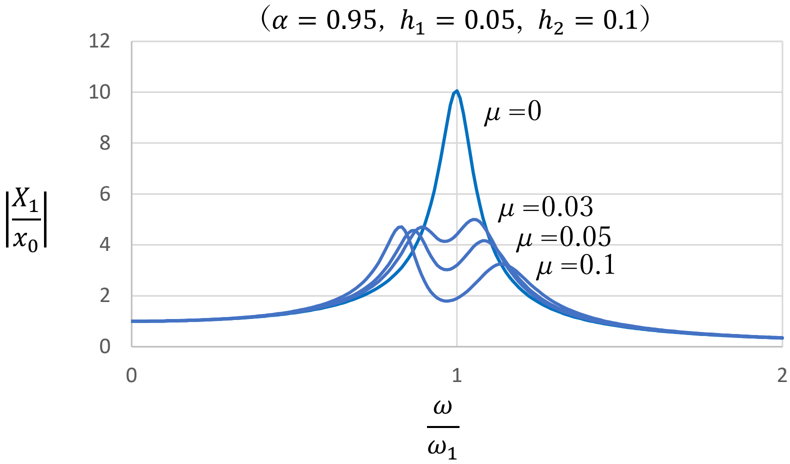

図 6　質量比ごとの共振曲線の比較

図 7 は、質量比と振動数比を一定にして（質量比 $\mu = 0.1$、振動数比 $\alpha = 0.9$）TMD の減衰定数を変化させた共振曲線である。これを見るとわかるように、どの減衰定数でも必ず通っている 2 つの点があり、これを定点という。定点がこのように定まるのは、主振動系が非減衰の場合に限るが、この定点を利用して最適な振動数比と減衰定数を決定する手法が**定点定理**である。

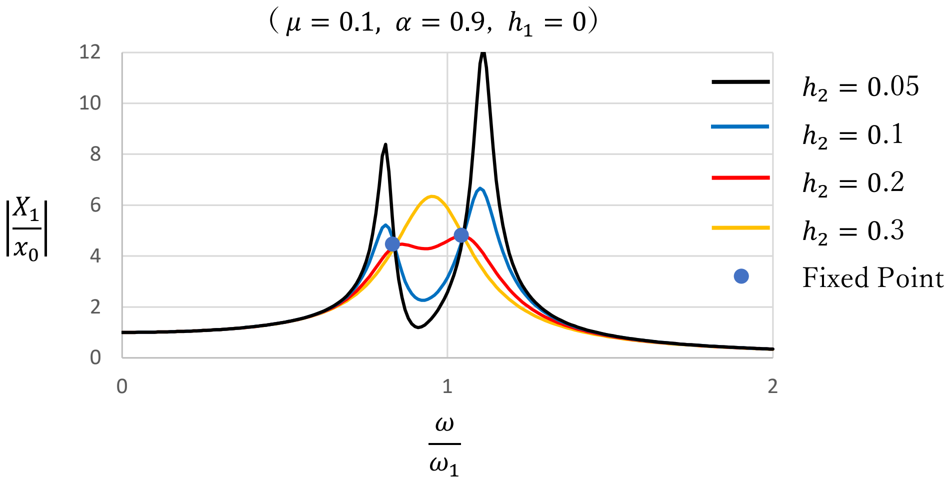

図 7　減衰定数ごとの共振曲線の比較

振動数比の変化によって共振曲線の 2 つの極大値が変わり、一方の振幅が小さくなるともう一方が大きくなるため、**定点定理では、その 2 つの極大値が同じ値となる振動数比を最適値として定める。**減衰定数を最適値に設定すると、図 8 のように定点が極大値となる共振曲線を描くことになる。これが、最も応答倍率が低減される最適同調された最適減衰の共振曲線となる。

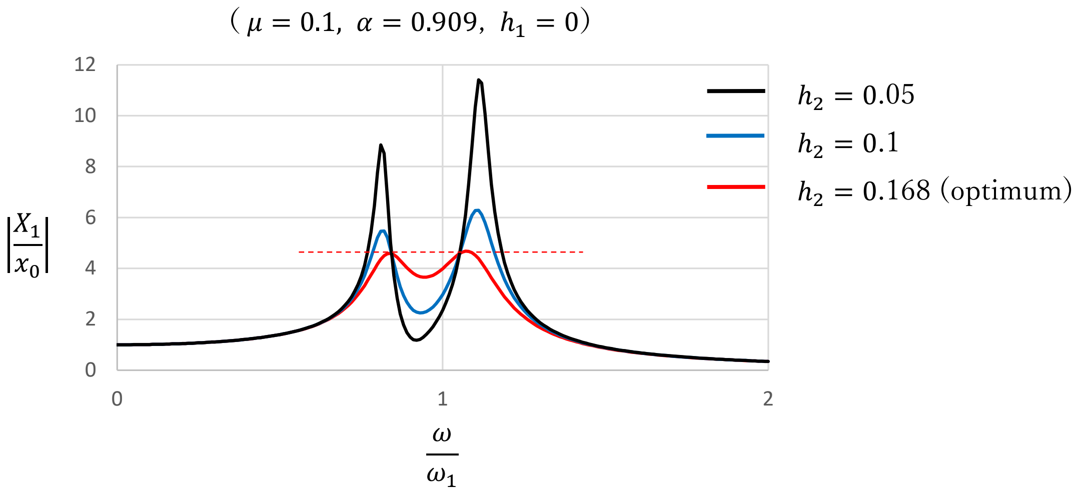

図 8　最適同調された最適減衰の共振曲線

2　TMD の最適振動数比と最適減衰定数

絶対変位応答倍率(25)式において、主振動系の減衰定数$h_1 = 0$、従振動系の減衰定数$h_2 = h$とおくと

$$\left|\frac{X_1}{x_0}\right| = \frac{\sqrt{\{\alpha^2 - \beta^2\}^2 + 4h^2\alpha^2\beta^2}}{\sqrt{\{(1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2) - \mu\alpha^2\beta^2\}^2 + 4\beta^2\{h\alpha(1-\beta^2[1+\mu])\}^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{a_1^2 + h^2 a_2^2}}{\sqrt{a_3^2 + h^2 a_4^2}} \tag{29}$$

ここに

$$a_1 = \alpha^2 - \beta^2$$
$$a_2 = 2\alpha\beta$$
$$a_3 = (1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2) - \mu\alpha^2\beta^2$$
$$a_4 = 2\alpha\beta(1-\beta^2[1+\mu]) \tag{30}$$

$h = 0$のとき

$$\left|\frac{X_1}{x_0}\right| = \left|\frac{a_1}{a_3}\right| \tag{31}$$

$h = \infty$のとき

$$\left|\frac{X_1}{x_0}\right| = \left|\frac{a_2}{a_4}\right| \tag{32}$$

定点では、両者が等しいので

$$\left|\frac{a_1}{a_3}\right| = \left|\frac{a_2}{a_4}\right| \tag{33}$$

すなわち

$$\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 = \left(\frac{a_2}{a_4}\right)^2 \tag{34}$$

$$\frac{\{\alpha^2-\beta^2\}^2}{\{(1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)-\mu\alpha^2\beta^2\}^2} = \frac{4\alpha^2\beta^2}{4\beta^2\{\alpha(1-\beta^2[1+\mu])\}^2} = \frac{1}{(1-\beta^2[1+\mu])^2} \tag{35}$$

ここで

$$a = \alpha^2,\quad b = \beta^2,\quad c = 1+\mu \tag{36}$$

とおくと

$$\frac{(a-b)^2}{(a-b+b^2-abc)^2} = \frac{1}{(1-bc)^2} \tag{37}$$

$$\frac{(a-b)}{(a-b+b^2-abc)} = -\frac{1}{(1-bc)} \tag{38}$$

$$(1+c)b^2 - 2(1+ac)b + 2a = 0$$

$$b^2 - \frac{2(1+ac)}{1+c}b + \frac{2a}{1+c} = 0 \tag{39}$$

bに関する二次方程式の解をφ_1, φ_2とすると、解と係数の関係から次式が成立する。

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2(1+ac)}{1+c} \tag{40}$$

$$\varphi_1 \varphi_2 = \frac{2a}{1+c} \tag{41}$$

ここで、減衰定数$h = \infty$のときに、解φ_1, φ_2における振幅が等しくなる条件から

$$\left(\frac{a_2}{a_4}\right)^2_{\varphi_1} = \left(\frac{a_2}{a_4}\right)^2_{\varphi_2} \tag{42}$$

$$\frac{1}{(1-\varphi_1 \mathrm{c})^2} = \frac{1}{(1-\varphi_2 \mathrm{c})^2}$$

$$1 - \varphi_1 c = \pm\{1 - \varphi_2 c\}$$

$\varphi_1 \neq \varphi_2$の条件から

$$1 - \varphi_1 c = -\{1 - \varphi_2 c\}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2}{\mathrm{c}} \tag{43}$$

二次方程式の係数との関係から

$$\frac{2(1+ac)}{1+c} = \frac{2}{\mathrm{c}} \tag{44}$$

$$a = \frac{1}{c^2} \tag{45}$$

従って、**最適振動数比**は

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{1+\mu} \tag{46}$$

二次方程式の解は

$$b^2 - b\left(\frac{2}{c}\right) + \frac{2a}{1+c} = 0$$

より

$$b = \frac{\left(\frac{2}{c}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2}{c}\right)^2 - 4\frac{2a}{1+c}}}{2} = \frac{1}{c} \pm \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{2}{c^2(1+c)}} = \frac{1}{c}\left(1 \pm \sqrt{\frac{c-1}{c+1}}\right) = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}}{1+\mu} \tag{47}$$

$b = \beta^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$より

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)_{1,2} = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}}{1+\mu}} \tag{48}$$

次に、定点において応答倍率が山の頂上（極大）となるような減衰定数hを求める。絶対変位応答倍率(29)式から

$$\left(\frac{X_1}{x_0}\right)^2=\frac{a_1^2+h^2a_2^2}{a_3^2+h^2a_4^2} \tag{49}$$

ここに

$$\begin{gathered}a_1^2=\{\alpha^2-\beta^2\}^2=(a-b)^2\\ a_2^2=\{2\mathrm{\alpha\beta}\}^2=4ab\\ a_3^2=\{(1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)-\mu\alpha^2\beta^2\}^2=(a-b+b^2-abc)^2\\ a_4^2=\{2\alpha\beta(1-\beta^2[1+\mu])\}^2=4ab(1-bc)^2\end{gathered} \tag{50}$$

よって

$$\left(\frac{X_1}{x_0}\right)^2=\frac{(a-b)^2+4h^2ab}{(a-b+b^2-abc)^2+4h^2ab(1-bc)^2}=\frac{f(b)}{g(b)} \tag{51}$$

極大点では次式の偏微分がゼロになることから

$$\frac{\partial}{\partial b}\left\{\left(\frac{X_1}{x_0}\right)^2\right\}=\frac{f'(b)g(b)-f(b)g'(b)}{g(b)^2}=0 \tag{52}$$

従って

$$f'(b)g(b)-f(b)g'(b)=0 \tag{53}$$

ここに

$$\begin{gathered}f(b)=(a-b)^2+4h^2ab\\ f'(b)=-2(a-b)+4h^2a\\ g(b)=(a-b+b^2-abc)^2+4h^2ab(1-bc)^2\\ g'(b)=2(a-b+b^2-abc)(-1+2b-ac)+h^2\{4a(1-bc)^2-8abc(1-bc)\}\end{gathered}$$

(37)式から

$$\frac{(a-b)^2}{(a-b+b^2-abc)^2}=\frac{1}{(1-bc)^2}$$

$$(a-b+b^2-abc)^2=(a-b)^2(1-bc)^2 \tag{54}$$

$$(a-b+b^2-abc)=-(a-b)(1-bc) \tag{55}$$

これより

$$\begin{aligned}g(b)&=(a-b+b^2-abc)^2+4h^2ab(1-bc)^2=(a-b)^2(1-bc)^2+4h^2ab(1-bc)^2\\ &=(1-bc)^2\{(a-b)^2+4h^2ab\}\\ g'(b)&=2(a-b+b^2-abc)(-1+2b-ac)+h^2\{4a(1-bc)^2-8abc(1-bc)\}\\ &=2(a-b)(1-bc)(1-2b+ac)+h^2\{4a(1-bc)^2-8abc(1-bc)\}\end{aligned}$$

以上を整理すると

$$f(b)=(a-b)^2+4h^2ab \tag{56}$$

$$f'(b)=-2(a-b)+4h^2a \tag{57}$$

$$g(b)=(1-bc)^2f(b) \tag{58}$$

$$g'(b) = (1 - bc)[2(a - b)(1 - 2b + ac) + h^2\{4a(1 - bc) - 8abc\}] \tag{59}$$

(53)式に代入すると

$$\begin{aligned} &f'(b)g(b) - f(b)g'(b) \\ &= \{-2(a - b) + 4h^2 a\}(1 - bc)^2 f(b) \\ &- f(b)(1 - bc)[2(a - b)(1 - 2b + ac) + h^2\{4a(1 - bc) - 8abc\}] = 0 \end{aligned}$$

$f(b)(1 - bc)$で除すると

$$\{-2(a - b) + 4h^2 a\}(1 - bc) - [2(a - b)(1 - 2b + ac) + h^2\{4a(1 - bc) - 8abc\}] = 0$$

$$\{4a(1 - bc) - 4a(1 - bc) + 8abc\}h^2 - 2(a - b)\{(1 - bc) + (1 - 2b + ac)\} = 0$$

$$(8abc^3)h^2 - 2(a - b)(2 - bc - 2b + ac) = 0$$

$$h^2 = \frac{(a - b)(2 - bc - 2b + ac)}{4abc^3} \tag{60}$$

ここで、(39)式と(45)式から

$$b^2 - \frac{2(1 + ac)}{1 + c}b + \frac{2a}{1 + c} = 0$$

$$a = \frac{1}{c^2}$$

よって

$$b^2 - b\left(\frac{2}{c}\right) + \frac{2a}{1+c} = 0 \;\rightarrow\; b^2 - b\left(\frac{2}{c}\right) + \frac{2}{1+c}\frac{1}{c^2} = 0 \;\rightarrow\; b^2c^2 - 2bc + \frac{2}{1+c} = 0$$

$$\rightarrow\; b^2c^2(1 + c) - 2bc(1 + c) + 2 = 0 \;\rightarrow\; b^2c^2 + b^2c^3 - 2bc - 2bc^2 + 2 = 0 \tag{61}$$

(60)式を変形すると

$$h^2 = \frac{(a-b)(2-bc-2b+ac)}{4abc^3} \rightarrow \frac{\left(\frac{1}{c^2}-b\right)\left(2-bc-2b+\frac{1}{c}\right)}{4bc} \rightarrow \frac{(1-bc^2)\left(2-bc-2b+\frac{1}{c}\right)}{4bc^3} \rightarrow \frac{2-bc-2b+\frac{1}{c}-2bc^2+b^2c^3+2b^2c^2-bc}{4bc^3}$$

$$\rightarrow \frac{b^2c^3-2bc-2bc^2+2-2b+\frac{1}{c}+2b^2c^2}{4bc^3} \rightarrow \frac{-b^2c^2-2b+\frac{1}{c}+2b^2c^2}{4bc^3} \rightarrow \frac{-2b+\frac{1}{c}+b^2c^2}{4bc^3} \rightarrow \frac{-2c+\frac{1}{b}+bc^3}{4c^4}$$

ここで、(36)式と(47)式から

$$c = 1 + \mu$$

$$b = \frac{1 + \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}}}{1 + \mu}$$

を代入すると

$$1/b = \frac{1 + \mu}{1 + \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}}} = \frac{1}{2}(1 + \mu)(2 + \mu)\left(1 - \sqrt{A}\right), \qquad A = \frac{\mu}{2 + \mu}$$

$$-2c + \frac{1}{b} + bc^3 = -2(1 + \mu) + \frac{1}{2}(1 + \mu)(2 + \mu)\left(1 - \sqrt{A}\right) + (1 + \mu)^2\left(1 + \sqrt{A}\right) = \frac{(1+\mu)\mu}{2}\left[3 + \sqrt{A}\right]$$

より、(60)式は

$$h^2 = \frac{\mu}{8(1+\mu)^3}\left(3+\sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}\right) \tag{62}$$

同様に

$$b = \frac{1-\sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}}{1+\mu}$$

のときには

$$h^2 = \frac{\mu}{8(1+\mu)^3}\left(3-\sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}\right) \tag{63}$$

となるので、平均化すると

$$h_{opt}^2 = \frac{3\mu}{8(1+\mu)^3} \tag{64}$$

従って、**最適減衰定数**は

$$h_{opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}} \tag{65}$$

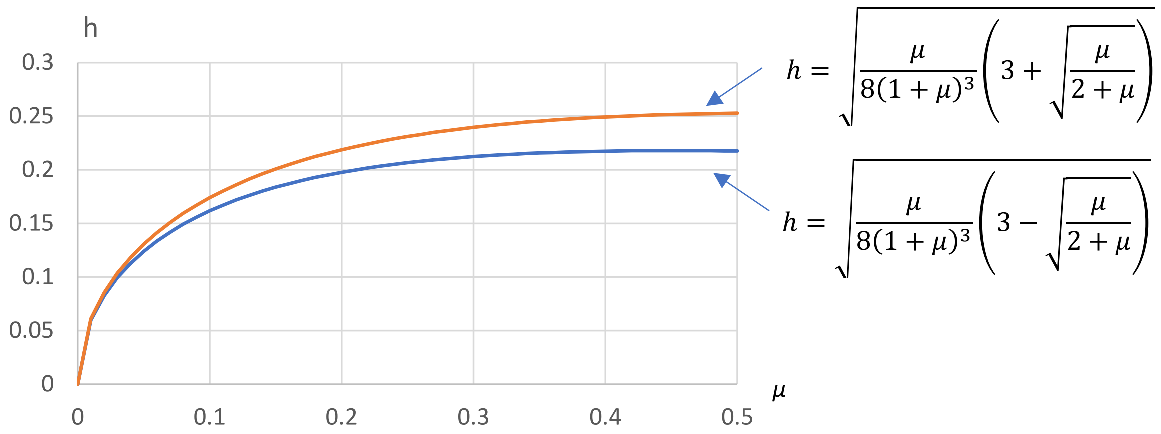

図 9　最適減衰定数